Lycée pilote 7 novembre de Monastir

BACCALAUREAT

Sciences expérimentale

Sciences expérimentale

***

Devoir de contrôle n°1

***

Mathématiques

Durée de l'épreuve : 2 heures

Proposé par le professeur

Trimèch-M

NB : On tiendra compte de la rédaction et de la clarté du raisonnement dans l'appréciation des copies.

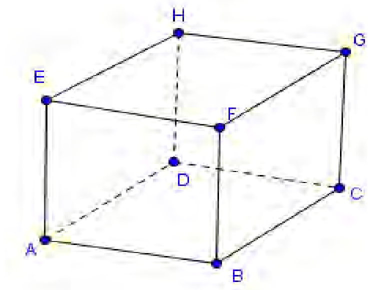
LYCEE PILOTE DE GABES *Prof :* M^r Jouou Louey	**EPREUVE DE MATHEMATIQUES** *(Mars 2011)** Durée : 120 mn*	*Classe : $4^{ème}$ Sc-Exp 1* **DEVOIR DE CONTRÔLE N°1** **2ème semestre**

EXERCICE N°1 : (3points)

Répondre par **vrai** ou **faux** ,**sans justification.**

1-/Dans la figure ci-contre **ABCDEFGH** est un cube d'arête **2**.

a-) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ **.b-)** $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH} = 2$ **c-)sin(HBG) =** $\frac{\sqrt{3}}{3}$



2-/L'ensemble des points **M** de l'espace $\mathcal{E}$ tels que

MA² **+** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB}$ **= AB²** est un plan .

3-/ L'ensemble des points **M** de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB}$ **= AB** est une sphère

4-/$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite intersection des plans**(ACG)et (BDH).**

EXERCICE N°2 : (6points)

L'espace $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ **.**

On considère les points **A(0 ,1 , 0)** ; **B (1 , 0 , -2)** ; **C (0 , 0 , -1) et D(1 , -1 , 0)** .

1-/ a-)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis calculer . $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$

b-) En déduire que les points **A, B, C** déterminent un plan **P** et que les points **A, B, C,** et **D** ne sont pas coplanaires.

c-) Calculer L'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre **DABC**, puis déduire la distance de **D** à **P**.

2-/a-) Montrer qu'une équation cartésienne du plan **P** est **x-y+z+1=0 .**

b-) Montrer que **H(0, 0, -1)**est le projeté orthogonal de **D** sur **P**.

3-/On considère **S =** $\{M(x, y, z) \text{ tels que } x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2 = 0\}$

a-) Montrer que le point **E(2 ,-2,$\sqrt{2}$)** appartient à **(S)** .

b-) Montrer que **S** est une sphère dont on précisera le centre et le rayon**.**

c-) Montrer que **P** et **S** sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ que l'on caractérisera.

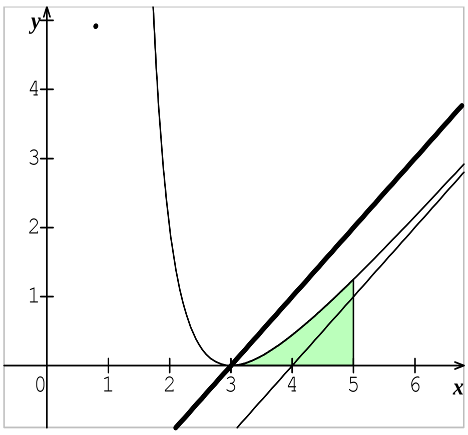
4-/Déterminer l'ensemble des points **M** de P tels que le triangle **DME** soit isocèle et rectangle en **D**

.EXERCICE N°3 : (3points)

Ci -Dessous la représentation **Cf** d'une fonction **f** définie et dérivable sur $]1, +\infty[$**.**

Les droitesΔ etΔ'd'équations **x=1** et **y=x- 4** sont des asymptotes à **Cf.**

A désigne l'aire exprimée en unité d'aire de la partie délimitée par **Cf** ,l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives **x= 3** et **x=5**



1-/a-) Par lecture graphique donner la position relatives de **Cf** et Δ''d'équation **y=x-3**

b-) En déduire que **A≤2.**

c-) Par des considérations d'aires prouver que **A>**$\frac{1}{2}$

2-/Soit **J=**$\int_3^5 xf'(x)dx$**.** A l'aide d'une intégration par partie , montrer que **J= 5f(5) - A**

3-/Sachant que **f(x)=x-4 +**$\frac{4}{(x-1)^2}$;déterminer la valeur de **A** puis déduire la valeur de **J**

EXERCICE N°4 : (8points)

1-/ Soit la fonction **f** définie sur $[\,0\,,1\,[$ par **f (x) =** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$

a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

b-) Dresser le tableau de variation de **f**.

c-) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

d-) Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e-) Tracer **(** $\mathscr{C}$ **)** et **(** $\mathscr{C}'$ **)** courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère$(O,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives **:**

x=0 et **y=1**. Montrer que $A=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **IN** par $u_n=\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

b-) Prouver que la suite est convergente.

c-) Montrer que pour tout **n** de **IN** ,$0\leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$, puis déduire la limite de la suite.

4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur **IN** par $v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\ldots\ldots+\frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-) Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \ldots\ldots\ldots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b-) En intégrant l'égalité précédente montrer que $\forall$**n** de **IN**; $v_n - I = (-1)^n u_n$. où $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

c-) Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

d-) Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de **I**

5-/ Soit φ une fonction continue sur IR . On considère la fonction définie sur l'intervalle

$\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\int_0^{tgx}\frac{\varphi(t)}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[$et que $F'(x) = \varphi(\mathrm{tg}x)$

b-)Déterminer **F(x)** dans chacun des cas suivants ;$\varphi(t)=1$, $\varphi(t)=t^2$.

c-) En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$ puis tirer la valeur de **A.**

Pour commencer : **2 points**

Répondre par vrai ou faux.

- 1. Soit f une fonction dérivable sur [-1,2] telle que :
  - $1 \leq f'(x) \leq 2$
  - f(-1)=0

  alors $2 \leq f(2) \leq 6$.
- 2. L'ensemble des points M d'affixe $z = 2 + i\cos\theta$ où $\theta \in IR$ est la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 1 **6 points**

1. a. Résoudre dans C l'équation $(E_2) : z^2 - 2z + 2 = 0$

   On notera z_1 et z_2 les racines de (E_2).

   b. Mettre z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

   Calculer alors la valeur de $z_1^8 + z_2^8$.

2. Soit p un nombre complexe non nul.

   On considère dans C l'équation :

$$(E_p) : z^2 - pz + (1 + i)p - 2i = 0$$

   Montrer que si l'équation (E_p) possède deux racines conjuguées distinctes alors p est réel.

   Montrer que dans ce cas $p = 2$.

3. Soit θ un réel de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   On considère les points A, B et M d'affixes respectives $1 + i$, $1 - i$ et $1 - i + ie^{2i\theta}$.

   a. Montrer que $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}} = 2e^{2i\theta}$

   b. Montrer que si $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}}$ est réel alors les points A, B et M sont alignés.

   Déterminer alors θ.

   c. Montrer que si $z_{\overrightarrow{BM}} \cdot \overline{z_{\overrightarrow{BA}}}$ est imaginaire alors le triangle ABM est rectangle en B.

   Déterminer alors θ.

Exercice 2 **4 points**

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soient les points B , M et M' d'affixes respectives $\frac{1+i}{2}$, z et z' tel que $z' = (1 - i)z - 1$

1. a. Montrer que $|z'| = \sqrt{2}\left|z - \frac{1+i}{2}\right|$

   b. Déterminer et construire l'ensemble $(E) = \{ M(z) \text{ tel que } |z'| \leq OB \}$.

2. On suppose $M \neq B$.

   a. Montrer que $\arg(z') \equiv -\frac{\pi}{4} + (\vec{u}, \overrightarrow{BM})[2\pi]$.

   b. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{OM'}$ soient colineaires et de sens contraires.

Exercice 3 **3 points**

Soit g la fonction définie sur $[-1,1]$ par $g(x)=\dfrac{x}{1+|x|}$.

1. Etudier la dérivabilité de g en 0.
2. Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+|\cos x|}$.

   Montrer que f est dérivable en $\dfrac{\pi}{2}$ et caculer $f'(\dfrac{\pi}{2})$.
3. Montrer que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}} = -2\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Exercice 4 **5 points**

Questions de cours :

- Enoncer le théorème de Rolle.
- Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Application

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=x^2-\sin\dfrac{\pi}{2}x$.

On designe par (Cf) la courbe réprésentatative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Justifier la continuité et la dérivabilité de f sur IR.
2. a. Montrer qu'il existe un point de (Cf) d'abscisse c appartient à $]0,1[$ tel que la tangente en ce point est de vecteur directeur $\vec{i}$.

   b. Déterminer l'expression de $f'(x)$ la fonction dérivée de f.

   c. Montrer que $f(c)=c^2-\dfrac{\sqrt{\pi^2-16c^2}}{\pi}$
3. a. Calculer f(1) et f(2).

   b. Montrer que la courbe de f coupe la droite d'équation cartésienne $y=2$ en un point d'abscisse α appartient à $]1,2[$.

   c. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 0.5.